S. Harini

(5 pages)

S.No. 2170

12UMA11

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2017.

Sixth Semester

Mathematics

REAL ANALYSIS – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. Give one example for connected and not connected subsets in R'.

   R' –ல் தொடுத்த கணம் மற்றும் தொடுத்த தல்லாத கணம் ஆகியவற்றிற்கு தலா ஒரு உதாரணம் கொடு.

2. Define contraction of metric spaces.

   மெட்ரிக் வெளிகளில் குறுக்கம் என்பதை வரையறு.

3. Why the function $f(x)=x^2$, $-\infty<x<\infty$, does not attain its maximum value?

   $f(x)=x^2$, $-\infty<x<\infty$, என்ற சார்பு ஏன் அதன் மீப்பெரும் மதிப்பை அடைவதில்லை.

4. Show that the function $f(x)=x^2$ is uniformly continuous on [0, 1].

   [0, 1]–ன் மீது $f(x)=x^2$ என்ற சார்பு சீரான தொடர்ச்சியுடையது எனக் காட்டுக.

5. Define : set of measure zero.

   பூச்சிய அளவு கணம் – வரையறு.

6. If $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}$ find $f'(x)$ by chain rule.

   $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}$ எனில் சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்தி $f'(x)$ ஐக் காண்க.

7. Show that the function $f(x)=\frac{x}{x-2}, 10\le x\le 20$, obey the hypotheses of the law of the mean.

   $f(x)=\frac{x}{x-2}, 10\le x\le 20$, என்ற சார்பு சராசரி விதியின் எடுகோள்களை பூர்த்தி செய்யும் எனக் காட்டு.

8. State Rolle's theorem.

   ரோலின் தேற்றத்தைக் கூறு.

9. Show that $h_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}, -\infty<x<\infty$ converges to zero as $n\to\infty$.

   $n\to\infty$ எனும் போது $h_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}, -\infty<x<\infty$, ஆனது பூச்சியத்திற்கு ஒருங்கும் எனக் காட்டு.

10. Define uniforma convergence of sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ of real - valued functions on a set E.

    E–என்ற கணத்தின் மீது $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மெய் மதிப்புடைய சார்புகளான கொடர்முறையின் சீரான ஒருங்கலை வரையறு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) If A_1 and A_2 are connected subsets of a metric space M, and if $A_1\cap A_2\neq\varphi$, then prove that $A_1\cup A_2$ is also connected.

    மெட்ரிக் வெளி M–ல் A_1 மற்றும் A_2 என்பன தொடுத்த உட்கணங்கள் மற்றும் $A_1\cap A_2\neq\varphi$ என அமையுமாயின் $A_1\cup A_2$ –ம் ஒரு தொடுத்த கணம் என நிரூபி.

    Or

    (b) State and prove nested interval theorem on complete metric spaces.

    முழுமையான மெட்ரிக் வெளிகளில் ஒன்றினுள் ஒன்று பொதிந்த இடைவெளிகளின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

12. (a) If f is a continuous function from a compact metric space M_1 into a metric space M_2, then prove that the range $f(M_1)$ of f is also compact.

    கச்சிதமான மெட்ரிக்வெளி M_1–லிருந்து மெட்ரிக்வெளி M_2–க்கு f ஒரு தொடர்ச்சியுடைய சார்பு எனில் f–ன் வீச்சு $f(M_1)$ –ம் ஒரு கச்சிதமானது என நிரூபி.

    Or

    (b) If f is a 1 – 1 continuous function from a compact metric space M_1 onto a metrix space M_2, then prove that f is a homeomorphism of M_1 onto M_2.

    கச்சிதமான மெட்ரிக்வெளி M_1–லிருந்து மெட்ரிக்வெளி M_2–க்கு f ஒரு 1 – 1 மற்றும் தொடர்ச்சியுடைய மேல் சார்பு எனில் f ஆனது M_1–லிருந்து M_2–க்கு ஒரு வடிவொப்புமை என நிரூபி.

13. (a) If f is a bounded function on $[a, b]$ then for any two subdivision σ and τ of $[a, b]$, prove that $u(f:\sigma)\ge L[f:\tau]$.

    $[a, b]$ ன் மீது f ஆனது வரம்புடையது எனில் $[a, b]$ ன் எந்த இரு உப்பிரிவுகள் σ மற்றும் τ –க்கு $u(f:\sigma)\ge L[f:\tau]$ என நிரூபி.

    Or

[P.T.O.]

(b) For each $n \in I$ if σ_n is the subdivision $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n}{n}\right\}$ of [0, 1], then compute $\lim_{n\to\infty} L[f:\sigma_n]$, where $f(x)=x^2$, $0 \le x \le 1$.

$f(x)=x^2$, $0 \le x \le 1$ எனில் $n \in I$ என்ற ஒவ்வொரு n-க்கும் σ_n என்பது $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n}{n}\right\}$ என்ற [0, 1] -ன் உட்பிரிவு எனில் $\lim_{n\to\infty} L[f:\sigma_n]$ஐக் கணக்கிடுக.

14. (a) State and prove law of the mean.

சராசரி விதியைக் கூறி நிறுவு.

Or

(b) Show that the improper integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ is convergent.

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ என்ற தகா தொகையீடு ஒருங்கும் எனக் காட்டு.

15. (a) If $f_n'(x)$ exists for each $x \in [a,b]$, if $f_n'(x)$ is continuous on $[a, b]$, if $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges on $[a, b]$ to f, and $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly on $[a, b]$ to g, then prove that $g(x)=f'(x)$, $a \le x \le b$.

ஒவ்வொரு $x \in [a,b]$ -க்கும் $f_n'(x)$ உள்ளது. $f_n'(x)$ ஆனது $[a, b]$ -ன் மீது தொடர்ச்சியுடையது. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது $[a, b]$ -ன் மேல் f-க்கு ஒருங்கும் மற்றும் $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது $[a, b]$ -ன் மேல் g-க்கு சீராக ஒருங்கும் எனில் $g(x)=f'(x)$, $a \le x \le b$ என நிரூபி.

Or

(b) If the power series $\sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K$ converges for $x=x_0$, then show that it converges uniformly on $[-x_1, x_1]$ where x_1 is any number such that $0 < x_1 < |x_0|$.

$\sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K$ என்ற அடுக்குத் தொடர் $x=x_0$ -க்கு ஒருங்கும் எனில் $0 < x_1 < |x_0|$ என்ற எந்த ஒரு x_1-க்கும் அத்தொடர் $[-x_1, x_1]$-ன் மீது சீராக ஒருங்கும் என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. In a metric space (M, ρ), prove that a subset A of M is totally bounded if and only if every sequence of points of A contains a Cauchy subsequence.

மெட்ரிக் வெளி (M, ρ)-ல் M-ன் உட்கணம் A ஆனது முழுமையாக வரம்புடையது எனில், எனில் மட்டுமே A -ன் புள்ளிகளாலான தொடர்முறை ஒவ்வொன்றும் கோஷி உள்தொடர் முறை ஒன்றைக் கொண்டிருக்கும் என நிரூபி.

17. Prove that the metric space M having Heine-Borel property is compact.

ஹெயின் - போரல் பண்பு கொண்ட மெட்ரிக் வெளி கச்சிதமானது என நிரூபி.

18. State and prove chain rule on differentiation.

வகையிடலின் மீதான சங்கிலி விதியைக் கூறி நிறுவு.

19. (a) State and prove second fundamental theorem of calculus.

(b) Show that $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ converges.

(அ) நுண்கணிதத்தின் இரண்டாவது அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

(ஆ) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ ஒருங்கும் எனக் காட்டு.

20. If $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of functions in $R[a, b]$ which converges uniformly to the function f on $[a, b]$, then prove that

(a) $f \in R[a,b]$

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது $R[a, b]$ -ல் சார்புகளாலான ஒரு தொடர்முறை மற்றும் $[a, b]$-ன் மீது அது f-க்கு சீராக ஒருங்கும் எனில்

(அ) $f \in R[a,b]$

(ஆ) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ என நிறுவு.

pages)

S.No. 2317

12UMA11

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL/MAY 2018.

Sixth Semester

Mathematics

REAL ANALYSIS – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Define a connected set.

வரையறு : தொடுத்த கணம்.

2. Define $\in$– dense set.

வரையறு : $\in$– அடர்த்தியான கணம்.

3. Define a compact metric space.

வரையறு : கச்சிதமான மெட்ரிக் வெளி.

S.Harini

4. Is $f(x)=x^3$, $(0 \le x \le 1)$ uniformly continuous function? Justify.

$f(x)=x^3$, $(0 \le x \le 1)$ என்ற சார்பு சீரான தொடர்ச்சியானதா? கூற்றை நியாயப்படுத்துக.

5. Define Riemann integral.

வரையறு : ரீமான் தொகையீடு.

6. If $f(x)=x$, $(0 \le x \le 1)$ and $\sigma=\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ is a subdivision of $[0, 1]$, compute $U(f; \sigma)$.

$f(x)=x$, $(0 \le x \le 1)$ மற்றும் $\sigma=\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ என்பது $[0, 1]$ –ன் உட்பிரிவு எனில், $U(f; \sigma)$–ஐ கணக்கிடுக.

7. State whether $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $(-1 \le x \le 1)$ satisfies the hypothesis of Rolle's theorem.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $(-1 \le x \le 1)$ என்று சார்பு ரோல்ஸ் தேற்றத்தின் எடுகோள்களை பூர்த்தி செய்யுமா? எனக் கூறுக.

8. State the Law of mean.

சராசரி விதியைக் கூறுக.

9. Define point wise convergence of sequence of functions.

வரையறு : புள்ளிகளைப் பொருத்து ஒருங்கும் சார்புகளின் வரிசை.

10. Is $g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$, $n=1, 2, \ldots,$ $0 \le x < \infty$ converges uniformly to 0?

$g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$, $n=1, 2, \ldots,$ $0 \le x < \infty$ என்ற வரிசை 0–க்கு சீராக ஒருங்குமா?

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If A_1 and A_2 are connected subsets of a metric space M, and if $A_1 \cap A_2 \neq \phi$, prove that $A_1 \cup A_2$ is connected.

A_1 மற்றும் A_2 என்பவை M என்ற மெட்ரிக் வெளியின் தொடுத்த உட்கணங்கள் மற்றும் $A_1 \cap A_2 \neq \phi$ எனில் $A_1 \cup A_2$–ம் தொடுத்த கணம் என நிரூபி.

Or

(b) If $\langle M, \rho \rangle$ is a complete metric space and A is a closed subset of M, then prove $\langle A, \rho \rangle$ is also complete.

A என்பது $\langle M, \rho \rangle$ என்ற முழுமையான M மெட்ரிக் வெளியின் மூடிய கணம் எனில், $\langle A, \rho \rangle$ –ம் முழுமையான மெட்ரிக் வெளி என நிரூபி.

12. (a) If A is a closed subset of a compact metric space $\langle M, \rho \rangle$, prove that $\langle A, \rho \rangle$ is also compact.

கச்சிதமான மெட்ரிக் வெளி $\langle M, \rho \rangle$–ல் A என்பது ஒரு மூடிய உட்கணம் எனில், $\langle A, \rho \rangle$–ம் ஒரு கச்சிதமான மெட்ரிக் வெளி என நிறுவுக.

Or

(b) If f be a continuous function from a compact metric space M into R^1, prove that f attains a maximum and minimum values at some points of M

f என்பது கச்சிதமானை மெட்ரிக் வெளி M –லிருந்து R^1 –க்கு ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், M –ல் உள்ள சில புள்ளிகளில் f –ன் அதிகபட்ச மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்புகள் இருக்கும் என நிறுவுக.

13. (a) If each of the subsets $E_1, E_2, \ldots$ of R^1 is of measure zero, prove that $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ is also of measure zero.

$E_1, E_2, ...$ ஆகியவை R^1–ன் உட்கணங்கள் மற்றும் ஒவ்வொரு உட்கணங்களின் அளவீடு பூஜ்யம் எனில் $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$–க்கும் பூஜ்ய அளவீடு இருக்கும் என நிரூபி.

Or

(b) Is $f(x) = |x|, (-\infty < x < \infty)$ differentiable? Justify your answer.

$f(x) = |x|, (-\infty < x < \infty)$ என்ற சார்பிற்கு எல்லாப் புள்ளியிலும் வகையீடு இருக்குமா? கூற்றை நியாயப்படுத்துக.

14\. (a) State and prove Rolle's theorem.

ரோல்ஸ் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

Or

(b) Prove that $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converges.

$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ஒருங்கும் என நிரூபி.

15\. (a) If $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of real – valued functions on a metric space M which converges uniformly to the function f on M and if each $f_n, (n \in I)$ is continuous at $a \in M$, prove that f is continuous at a.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது f என்ற சார்பிற்கு M–ன் மேல் சீராக ஒருங்கும் வரிசை மற்றும் ஒவ்வொரு $f_n, (n \in I)$–ம் a என்ற புள்ளியில் சார்பு எனில், f–ம் a என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு என நிரூபி.

Or

(b) If $f_n \in \mathcal{R}\ [a, b]$, $n = 1, 2, ...$ and if $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly to f on $[a, b]$, prove that $f_n \in \mathcal{R}\ [a, b]$ and $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

$f_n \in \mathcal{R}\ [a, b]$, $n = 1, 2, ...$ மற்றும் $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற வரிசை f என்ற சார்பிற்கு $[a, b]$ ன் மேல் சீராக ஒருங்கும் எனில், $f_n \in \mathcal{R}\ [a, b]$ மற்றும் $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16\. Prove that a subset of a metric space $\langle M, \rho \rangle$ is totally bounded iff every sequence of points of A contains a cauchy subsequence.

மெட்ரிக் வெளி $\langle M, \rho \rangle$–ல் உட்கணம் A ஆனது முழுமையான வரம்புடையது எனில், மட்டுமே A–ன் புள்ளிகளாலான ஒவ்வொரு வரிசைக்கும் கோஷி உள் தொடர் வரிசை ஒன்றைக் கொண்டிருக்கும் என நிரூபி.

17\. Prove that complete metric space $\langle M, \rho \rangle$ has the Heine – Borel property.

முழுமையான மெட்ரிக் வெளி $\langle M, \rho \rangle$–க்கு ஹெய்ன் – போரல் பண்பு இருக்கும் என நிரூபி.

18\. If f is a bounded function on a closed bounded interval $[a, b]$. Prove that $f_n \in \mathcal{R}\ [a, b]$ iff for each $\in > 0$, there exist a subdivision σ of $[a, b]$ such that $U[f; \sigma] < L[f; \sigma] + \in$.

மூடிய வரம்புடைய இடைவெளி $[a, b]$ ல் f என்பது வரம்புடைய சார்பு என்க. $f_n \in \mathcal{R}\ [a, b]$ எனில், எனில் மட்டுமே ஒவ்வொரு $\in > 0$ –க்கும், ஒரு உட்பிரிவு σ – விற்கு $U[f; \sigma] < L[f; \sigma] + \in$ என்றவாறு இருக்கும் என நிரூபி.

19\. State and prove First fundamental theorem of calculus.

நுண்கணிதத்தின் முதலாம் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

20\. If $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of continuous real–valued function on a compact metric space $\langle M, \rho \rangle$ such that $f_1(x) \le f_2(x) \le .... \le f_n(x) \le ....(x \in M)$ and if $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges point wise on M to the continuous function f, prove that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly to f on M.

கச்சிதமான மெட்ரிக் வெளி $\langle M, \rho \rangle$ –லிருந்து $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மெய் மதிப்பு தொடர்ச்சியான சார்புகளின் வரிசை மற்றும் $f_1(x) \le f_2(x) \le .... \le f_n(x) \le ....(x \in M)$ மற்றும் $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது M –ன் மேல் புள்ளிகளைக் பொருத்து f என்ற தொடர்ச்சியான சார்பிற்கு ஒருங்கும் எனில், $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது f–க்கு சீராக ஒருங்கும் என நிரூபி.

S. Harini

(8 pages)

S.No. 1981 **12UMA11**

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017.

Sixth Semester

Mathematics

REAL ANALYSIS – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. If $A = [0,1]$, then which of the following sets are open in A?

(a) $(1/2, 1]$

(b) $(1/2, 1)$

(c) $[1/2, 1)$.

$A = [0,1]$ எனில் பின்வருவனவற்றுள் எவை A – ல் திறந்த கணங்கள்?

(அ) $(1/2, 1]$

(ஆ) $(1/2, 1)$

(இ) $[1/2, 1)$.

2. If A_1, A_2 are connected subsets of a metric space and if $A_1 \cap A_2 \neq \varphi$, then prove that $A_1 \cup A_2$ is also connected.

ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் A_1, A_2 என்பன தொடுத்த கணங்கள் மற்றும் $A_1 \cap A_2 \neq \varphi$ எனில் $A_1 \cup A_2$ - ம் ஒரு தொடுத்த கணமே என நிரூபி.

3. When a metric space is said to be compact?

ஒரு மெட்ரிக் வெளி எப்போது கச்சிதமானது என்போம்?

4. Prove that a real-valued continuous function on the closed and bounded interval $[a,b]$ is uniformly continuous on $[a,b]$.

$[a,b]$ என்ற மூடிய வரம்புடைய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய ஒரு மெய் மதிப்பு சார்பானது $[a,b]$ - ன் மீது சீரான தொடர்ச்சியுடையது என நிரூபி.

5. For each $n \in I$ if $\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$ is a partition of $[0,1]$, then compute $\lim_{n \to \infty} L[f;\sigma_n]$ for the function $f(x) = x, 0 \le x \le 1$.

ஒவ்வொரு $n \in I$ க்கும் $\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$ என்பது $[0,1]$ ன் ஒரு பங்கீடு எனில் $f(x) = x, 0 \le x \le 1$ என்ற சார்புக்கு $\lim_{n \to \infty} L[f;\sigma_n]$ ஐக் கணக்கிடுக.

6. If $f(x) = \sin x^2$, then find $f'(x)$ by chain rule.

சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்தி $f(x) = \sin x^2$ ன் வகையிடு $f'(x)$ ஐக் காண்க.

7. Show that the function $f(x) = \sqrt{x(x-1)}, 0 \le x \le 1$ obeys the hypotheses of Rolle's theorem.

$0 \le x \le 1$ ல் $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ என்ற சார்பு ரோலின் தேற்றத்தின் எடுகோள்களை நிவர்த்தி செய்யும் எனக்காட்டுக.

8. Show that the integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ converges.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ என்ற தொகையீடு ஒருங்கும் எனக்காட்டு.

9. Define uniform convergence of sequence of functions.

சார்புகளாலான தொடர் முறையின் சீரான ஒருங்கலை வரையறு.

10. Show that the series $\sum_1^{\infty} x^n, 0 < x < 1$, converges to $1/(1-x)$.

$0 < x < 1$ எனில் $\sum_1^{\infty} x^n$ என்ற தொடர் $1/(1-x)$ க்கு ஒருங்கும் எனக்காட்டு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) If f is a continuous function from a connected metric space M_1 into a metric space M_2, then prove that the range $f(M_1)$ of f is also connected.

M_1 என்ற தொடுத்த மாப்பு வெளியிலிருந்து M_2 என்ற மாப்பு வெளிக்கு f, என்ற சார்பு தொடர்ச்சியுடையது எனில் f – ன் பிம்பம் $f(M_1)$ ஆனதும் தொடுத்தது என நிரூபி.

Or

(b) State and prove nested interval theorem.

ஒன்றுக்குள் ஒன்றான இடைவெளி தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

12. (a) Show that the function $g(x) = x^2, (-\infty < x < \infty)$ is not uniformly continuous.

$g(x) = x^2, (-\infty < x < \infty)$ என்ற சார்பு சீரான தொடர்ச்சியற்றது எனக்காட்டு.

Or

(b) If f is a continuous function from a compact metric space M_1 into a metric space M_2, then prove that the range $f(M_1)$ of f is also compact.

f, என்பது M_1 என்ற கச்சித யாப்பு வெளியிலிருந்து M_2 என்ற யாப்பு வெளிக்கு தொடர்ச்சியுடைய சார்பு எனில் f ன் பிம்பம் $f(M_1)$– ம் கச்சிதமானது என நிரூபி.

13. (a) If each of the subsets $E_1, E_2 \ldots$ of R^1 is of measure zero, then prove that $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ is also of measure zero and hence deduce that every countable subset of R^1 has measure zero.

R^1 ல், $E_1, E_2 \ldots$ என்ற ஒவ்வொரு உட்கணமும் பூச்சிய அளவுடையன எனில் $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ – ம் பூச்சிய அளவுடையது என்று நிரூபி. இதிலிருந்து R^1– ன் ஒவ்வொரு எண்ணிடத்தக்க கணமும் பூச்சிய அளவுடையது எனக் கொணர்க.

Or

(b) If $f \in R[a,b]$, then for any real number λ prove that $\lambda f \in R[a,b]$ and $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

$f \in R[a,b]$ எனில் எந்த ஒரு மெய்யெண் λ –க்கும் $\lambda f \in R[a,b]$ மற்றும் $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ என நிரூபி.

14. (a) State and prove the law of the mean.

சராசரி விதியைக் கூறி நிரூபி.

Or

(b) Prove that the improper integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverges.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ என்ற தகா தொகையீடு விரியும் என நிரூபி.

15. (a) State and prove Cauchy criterion for uniform convergence of sequence of functions.

சார்புகளாலான தொடர்முறைகளின் சீரான ஒருங்கலுக்கான கோஷியின் வரன்முறையைக் கூறி நிரூபி.

Or

(b) Let $\{fn\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real-valued functions on a metric space M which converges uniformly to the function f on M. If each $f_n, n \in I$, is continuous at $a \in M$, then prove that f is also continuous at a.

$\{fn\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது M என்ற யாப்பு வெளியில் மெய் மதிப்புச் சார்புகளாலான தொடர்முறையானது M –ன் மீது f என்ற சார்புக்கு சீராக ஒருங்கும் என்க. $n \in I$ எனில் ஒவ்வொரு f_n – ம் $a \in M$ இடத்து தொடர்ச்சியுடையது. எனில் f – ம் a– இடத்து தொடர்ச்சி உடையது என நிரூபி.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. Show that l^2 is a complete metric space.

l^2– ஒரு முழுமை யாப்பு வெளி எனக்காட்டு.

17. If M is a compact metric space, then prove that M has the Heine-Borel property.

M என்பது ஒரு கச்சிதமான யாப்பு வெளி எனில் M– ஆனது ஹெயின் – போரல் பண்பைப் பெற்றிருக்கும் என நிரூபி.

18. State and prove chain rule on derivatives.

வகையிடலில் சங்கிலி விதியைக் கூறி நிரூபி.

19. Show that the improper integral $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converges conditionally.

$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ என்ற தகா தொகையீடு நிபந்தனை ஒருங்கலுடையது எனக்காட்டு.

20. State and prove Dini's theorem on uniform convergence of sequence of functions.

சார்புகளாலான தொடர் முறையின் சீரான ஒருங்கலுக்கான டினியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

———————