S. Harini

(7 pages)

S.No. 2141

12UMA10

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2016.

Sixth Semester

Mathematics

ALGEBRAIC STRUCTURE II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — $(10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Give an example of a vector space over a field.

   ஒரு களம் F–யின் மேல் வெக்டர் வெளிக்கு ஒரு உதாரணம் கொடு.

2. Define the linear span of a subset in a vector space.

   ஒரு வெக்டர் வெளியில் ஒரு உட்கணத்தின் நேரியல் அளாவல்–ஐ வரையறு.

3. Define a Quotient Space.

   ஈவு வெளி – வரையறு.

4. Write a basis of the field of Complex numbers over reals.

   மெய்யெண்களின் மீது, சிக்கல் எண்களின் களத்தில் ஒரு அடிப்படையை எழுது.

5. Define the norm of a vector.

   ஒரு வெக்டரின் நெறியை வரையறு.

6. Define orthogonal vectors in a vector space.

   ஒரு வெக்டர் வெளியில், செங்குத்து வெக்டர்களை வரையறு.

7. Define an algebra over a field.

   ஒரு களத்தின் மேல் உள்ள அல்ஜிப்ராவை வரையறு.

8. Define invertible.

   நேர் மாற்றிடுதலை வரையறு.

9. Find the trace of $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

   $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$–யின் trace – ஐ காண்க.

10. Give an example of a Skew-symmetric matrix.

    எதிர் சமச்சீர் அணிக்கு ஒரு உதாரணம் கொடு.

SECTION B — $(5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Show that the sum of two subspaces of a vector space is a subspace.

    ஒரு வெக்டர் வெளியில் இரண்டு உட்வெளிகளின் கூட்டல் ஒரு உட்வெளியென நிறுவுக.

    Or

    (b) Let $W = \{(a_1, a_2, \ldots..) \in V : \lim_{n\to\infty} an = 0\}$. Prove that W is a subspace.

    V என்ற வெக்டர் வெளியில், W என்பது $W = \{(a_1, a_2, \ldots..) \in V : \lim_{n\to\infty} an = 0\}$ எனில், W என்பது V–யின் உட்வெளியென நிறுவுக.

12. (a) For any two subsets S, T of a vector space V, verify that $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

    ஒரு வெக்டர் வெளியில் S, T என ஏதேனும் இரு உட்கணங்கள் எனில் $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ என நிறுவுக.

    Or

    (b) If $v_1, v_2, \ldots.., v_n$ are linearly independent, show that every element in their linear span has a unique representation in the form $\lambda_1 v_1 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n$ when $\lambda_i \in F$.

    $v_1, v_2, \ldots.., v_n$ என்பது ஒருபடி சார்ந்தவைகள் எனில், அவற்றின் நேரியல் அளவின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\lambda_i \in F$ என்றவாறு $\lambda_1 v_1 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n$ என்ற வடிவில் ஒரே முறை எழுத முடியுமென நிறுவுக.

13. (a) If $u, v \in V$ and α, β are scalers, show that $(\alpha u + \beta v, \alpha u +, \beta v) = \alpha\overline{\alpha} < u,u > + \alpha\overline{\beta} < u,v > + \overline{\alpha}\beta < v,u > + \beta\beta < v,v >$.

    $u, v \in V$ மற்றும் α, β என்பன அளவெண் எனில் $(\alpha u + \beta v, \alpha u +, \beta v) = \alpha\overline{\alpha} < u,u > + \alpha\overline{\beta} < u,v > + \overline{\alpha}\beta < v,u > + \beta\beta < v,v >$ என நிறுவுக.

    Or

    (b) In $F^{(2)}$, define $(u,v) = 2\alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2$ where $n = (\alpha_1, \alpha_2)$ and $v = (\beta_1, \beta_2)$. Verify that this defines an inner product on $F^{(2)}$.

    $F^{(2)}$ யில் $n = (\alpha_1, \alpha_2)$ மற்றும் $v = (\beta_1, \beta_2)$ என்ற பொழுது $(u,v) = 2\alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2$ என வரையறுக்கப்பட்டால், இந்த வரையறு $F^{(2)}$–யின் மீது ஒரு உட்பெருக்கியென நிறுவுக.

14. (a) Let V be a finite – dimensional over F. Show that $T \in A(V)$ is regular if and only if T maps V onto V.

    F யின் மீது V என்பது முடிவுறு – பரிமாணம். $T \in A(V)$ என்பது ஒழுங்கானது ஆக இருக்க போதுமான தேவையான நிபந்தனை T என்பது – V யிலிருந்து V–க்கு முழுகோப்பு என நிறுவுக.

    Or

(b) Show that the relation of similarity is an equivalence relation in $A(V)$.

$A(V)$ யில் ஒப்புமை உறவு என்பது ஒரு சமான உறவென நிறுவுக.

15. (a) Verify that $tr(AB) = tr(BA)$ for $A, B \in F_n$.

$A, B \in F_n$ எனில் $tr(AB) = tr(BA)$ என நிறுவுக.

Or

(b) If A is invertible, show that $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$ for all B.

A என்பது நேர்மாற் உடையது எனில், எந்தவொரு அணி B–க்கும் $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$ என நிறுவுக.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. If T is a homomorphism from U on to V with Kernel W, show that U/W and V are isomorphic.

U யிலிருந்து V க்கு முழு கோப்புடைய தொடர் அமைவியல் T க்கு உட்கரு W எனில் U/W மற்றும் V யும் சம அளவுள்ள வெக்டர் வெளிகள் என நிறுவுக.

17. If V is finite-dimensional over F, show that any two bases of V have the same number of elements.

F –யின் மீது V என்பது முடிவுறு பரிமாணம் எனில் V – யின் எந்த இரு அடிப்படை கணங்கள். சம எண்ணிக்கை கொண்ட உறுப்புகளை கொண்டுயிருக்குமென நிறுவுக.

18. Let V be a finite-dimensional inner product space. Prove that V has an orthonormal basis.

V என்பது ஒரு முடிவுறு பரிமாண உட்பெருக்கல் வெளி. V ஆனது ஒரு அலகு நெறிச் செங்குத்து அடிப்படை கணம் பெற்றுயிருக்குமென நிறுவுக.

19. Let $W \subset V$ be invariant under T. Prove that

(a) T induces a linear transformation $\overline{T}$ on V/W

(b) If T satisfies the polynomial $q(x) \in F[x]$, then $\overline{T}$ satisfies $q(x)$.

(c) The minimal polynomial for $\overline{T}$ divides the minimal polynomial for T.

$W \subset V$ என்பது T – ஐ பொறுத்து மாற்றமுறாதது. நிறுவுக

(அ) T என்பது $\overline{T}$ என்ற ஒருபடி உருமாற்றத்தை உய்த்தெழுப்பியவும் தூண்டும் எனவும்

(ஆ) T ஆனது அடுக்கு கோவை $q(x)$ க்கு மூலமெனில் $\overline{T}$ என்பவும் $q(x)$ க்கு மூலமாகும்.

(இ) $\overline{T}$ –யின் சிறும அடுக்கி கோவையானது. T –யின் சிறும அடுக்கு கோவையை வகுக்கும்.

20. If F is a filed of characteristic 0, and $T \in A(V)$ is such that $tr(T^i) = 0$ for all $i \geq 1$, then show that T is nilpotent.

சிறப்பியல்பு பூஜ்ஜியமுடைய களம் F மற்றும் $T \in A(V)$ –க்கு அனைத்து $i \geq 1$ என்ற நிலையில் $tr(T^i) = 0$ எனில், T என்பது இன்ம அடுக்கு என நிறுவுக.

S. Harini

12UMA10

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL 2017.

Sixth Semester

Mathematics

ALGEBRAIC STRUCTURES – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Prove that Kernel of a homomorphism $\varphi : V \to W$ from a vector space V into a vector space W is a subspace of V.

   $\varphi : V \to W$ என்ற V லிருந்து W க்கான வெக்டர் வெளி செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் உட்கரு V ன் ஒரு உள்வெளி என நிரூபி.

2. What do you mean by $F^{(n)}$, where F is a field?

   F ஒரு களம் எனில் $F^{(n)}$ பற்றி நீ என்ன அறிவாய்?

3. Define linearly independent vectors of a vec[tor] space V over the field F.

   களம் F ன் மீதான வெக்டர் வெளி V ய ஒன்றையொன்று சாரா வெக்டர்களை வரையறு.

4. Show that $\frac{A+B}{B} \cong \frac{A}{A \cap B}$, where A and B a[re] finite dimensional subspaces of a vector space V

   A , B என்பன வெக்டர் வெளி V ன் இரு முடி[வு] பரிமாணங்களுடைய உள்வெளிகள் என $\frac{A+B}{B} \cong \frac{A}{A \cap B}$ என நிரூபி.

5. If W is a subspace of an inner product space V then show $W \cap W^{\perp} = (0)$.

   W என்பது உட்பெருக்கு வெளி V– ன் ஒரு உள்வெ[ளி] எனில் $W \cap W^{\perp} = (0)$ எனக்காட்டு.

6. If $\{V_i\}$ is an orthonormal set, then show th[e] vectors in $\{V_i\}$ are linearly independe[nt] $(i = 1, 2, 3, .. n)$.

   $\{V_i\}$ என்பது செங்குத்து அலகு கணம் எனில் $\{V_i\}$ வெக்டர்கள் ஒன்றையொன்று சாராதவை எ[ன] நிரூபி $(i = 1, 2, 3, .. n)$.

7. Define algebra.

   அறமம் வரையறு.

8. When the linear transformation $T \in A(V)$ is said to be nilpotent?

   $T \in A(V)$ என்ற நேரியல் உருமாற்றம் எப்போது படிசுழி உடையது என்போம்.

9. If $A \in F_n$ is invertible, then prove that $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$ for all $B \in F_n$.

   $A \in F_n$ என்பது நேர்மாறு உடையது எனில் எல்லா $B \in F_n$ க்கும் $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$ என நிரூபி.

10. Find the value of $tr\ A$, where $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in the field of characteristics 2.

    A என்பது, சிறப்பியல்புபான்மை மதிப்பு 2 ஆக உள்ள களத்தில், $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணி எனில் $tr\ A$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Let V be the vector space of sequences $(a_1, a_2, ...)$, over the field of real numbers then prove that the subset $W = \{(a_1, a_2, ...) \in V | \lim_{n \to \infty} a_n = 0\}$ is a subspace of V.

மெய்யெண்களாலான களத்தின் மீது V என்ப[து] $(a_1, a_2, ...)$ என்ற தொடர் முறைகளாலான ஒ[ரு] வெக்டர் வெளி எனில் $W = \{(a_1, a_2, ...) \in V | \lim_{n \to \infty} a_n = 0\}$ என்ற உட்கணம் V ன் ஒ[ரு] உள்வெளி என நிரூபி.

Or

(b) Prove that intersection of two subspaces o[f a] vector space V is also a subspaces of V.

வெக்டர் வெளி V ன் இரு உள்வெளிகள வெட்டும் V ன் ஒரு உள்வெளி என நிரூபி.

12. (a) If S and T are subsets of a vector space then prove that

   (i) $L(SUT) = L(S) + L(T)$ and

   (ii) $L(L(S)) = L(S)$.

   S , T என்பன வெக்டர் வெளி V ன் உட்கணங் எனில்

   (i) $L(SUT) = L(S) + L(T)$

   (ii) $L(L(S)) = L(S)$ என நிறுவுக.

Or

[P.T.

(b) In $F^{(4)}$, show that the vector $(-2,1,-3,1)$, $(0,2,-2,0)$ and $(0,2,-2,-6)$ are linearly independent over the field of real numbers.

$F^{(4)}$ ல் $(-2,1,-3,1)$, $(0,2,-2,0)$ மற்றும் $(0,2,-2,-6)$ என்ற வெக்டர்கள் மெய்யெண் களத்தின் மீது ஒன்றையொன்று சாராதவை எனக்காட்டு.

13. (a) State and prove Schwarz inequality.

ஷவார்ஸ் சமனிலியைக் கூறி நிரூபி.

Or

(b) If W is a subspaces of a finite dimensional inner product space V, then prove that $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

W என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய உட்பெருக்கு வெளி V ன் உள்வெளி எனில் $(W^{\perp})^{\perp} = W$ என நிரூபி.

14. (a) If V is finite dimensional vector space over F, then prove that $T \in A(V)$ is regular if and only if T maps V onto V.

F ன் மீது V ஆனது ஒரு முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளி எனில் $T \in A(V)$ ஆனது ஒழுங்கான உருமாற்றம் எனில், மட்டுமே T ஆனது V ஐ V ன் மேல் கோர்க்கும் என நிரூபி.

Or

(b) If V is finite dimensional vector space ove F, then prove that $T \in A(V)$ is invertible i and only if the constant term of the minima polynomial for T is not zero.

F –ன் மீது V ஆனது முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளி எனில் $T \in A(V)$ ஆனது நேர்மாறு உடையது எனில், மட்டுமே T ன் மீச்சிறு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலி உறுப்பு பூச்சியமன்று என நிரூபி.

15. (a) For all $A, B \in F_n$ prove that $(AB)' = B'A'$.

எல்லா $A, B \in F_n$ க்கும் $(AB)' = B'A'$ என நிரூபி.

Or

(b) Prove that interchanging two rows o determinant A changes the sign of th determinant.

அணிக்கோவை A ன் இரு நிரைகளை இடமாற்றினால் அணிக்கோவையின் மதிப்பின் குறிமாறும் என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If the vector space V is the internal direct sum of its subspaces $U_1, U_2, .., U_n$ then prove that V is isomorphic to the external direct sum of $U_1, U_2, .., U_n$.

வெக்டர் வெளி V ஆனது அதன் உள்வெளிகள் $U_1, U_2, .., U_n$ ஆகியவற்றின் உள் நேர்க் கூடுதல் எனில் V ஆனது $U_1, U_2, .., U_n$ ஆகியவற்றின் வெளி நேர்க்கூடுதலுக்கு ஒப்புமை உடையது என நிரூபி.

17. If V is a finite dimensional vector space and if W is a subspace of V, then prove that

(a) W is finite dimensional

(b) $\dim W \le \dim V$ and

(c) $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

முடிவுறு பரிமாண முடைய வெக்டர் வெளி V ன் உள்வெளி W எனில்

(அ) W முடிவுறு பரிமாணமுடையது

(ஆ) $\dim W \le \dim V$

(இ) $\dim V/W = \dim V - \dim W$ என நிரூபி.

18. (a) In $F^{(n)}$ prove that $(u,v) = \alpha\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2 + ... + \alpha_n\overline{\beta}_n$, where $u = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$, and $v = (\beta_1, \beta_2, .., \beta_n)$ is an inner product.

(b) State and prove parallelogram law in vecto spaces.

(அ) $F^{(n)}$ ல், $u = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ மற்றும் $v = (\beta_1, \beta_2, .., \beta_n)$ எனில் $(u,v) = \alpha\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2 + ... + \alpha_n\overline{\beta}_n$, ஒரு உட்பெருக்கம் என நிரூபி.

(ஆ) வெக்டர் வெளிகளின் இணைகர விதியைக் கூறி நிரூபி.

19. If V is a vector space over F and if $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then prove tha there is a basis of V in which the matrix of T is triangular.

களம் F–ன் மீது V ஒரு வெக்டர் வெளி மற்றும் $T \in A(V)$ ஆனது அதன் எல்லா மூலங்களையும் F– ல் பெற்றிருப்பின் T ன் அணி முக்கோண அணியாக அமையுமாறு ஒரு அடிக்கணம் V ல் இருக்கும் என நிரூபி.

20. (a) Prove that the matrix A is invertible if and only if $\det A \neq 0$.

(b) Prove that, if the matrix A is invertible then $(\det A)^{-1} = (\det A^{-1})$.

(அ) அணி A நேரெதிர் அணி உள்ளது எனில், எனில் மட்டுமே $\det A \neq 0$ என நிரூபி.

(ஆ) அணி A நேரெதிர் அணி உடையது எனில் $(\det A)^{-1} = (\det A^{-1})$ என நிரூபி.

———

S. Harini

(…ages)

S.No. 1980

12UMA10

(For the candidates admitted from 2012-2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017.

Sixth Semester

Mathematics

ALGEBRAIC STRUCTURE – II

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. In a vector space V over the field F, show $\alpha(v-w) = \alpha v - \alpha w$ for all $v, w \in V$ and $\alpha \in F$.

   களம் F –ன் மீதான வெக்டர் வெளி V –ல் எல்லா, $v, w \in V$ மற்றும் எல்லா $\alpha \in F$ –க்கும் $\alpha(v-w) = \alpha v - \alpha w$ எனக் காட்டு.

2. If V is a vector space and if $W = \{(a_1, a_2, \ldots) \in V, \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ then prove that W is a subspace of V.

   V ஒரு வெக்டர் வெளி மற்றும் $W = \{(a_1, a_2, \ldots) \in V \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ எனில் V –ல் W ஒரு உள் வெளி என நிருபி.

3. When a vector space is said to be fini… dimensional?

   ஒரு வெக்டர் வெளி எப்போது முடிவு… பரிமானமுடையது என்போம்?

4. Show that the elements 1 and i are linear… dependent over the field of complex numbers.

   சிக்கலெண் களத்தில் 1 மற்றும் i ஆகிய… ஒன்றையொன்று சார்ந்தவை எனக் காட்டு.

5. If V is an inner product space over the field … complex numbers, then show that $< u, u > = 0$ is re… every $u \in V$.

   V– என்பது சிக்கலெண்களத்தின் மீதான உட்பெருக்… வெளி எனில் எல்லா $u \in V$ –க்கும் $< u, u > = 0$ என… காட்டு.

6. Define orthogonal complement of a subspace W o… a vector space V.

   ஒரு வெக்டர் வெளி V –ன் உள்வெளி W –ன் செங்குத்த… நிரப்பியை வரையறு.

7. Define algebra.

   அறமம் – வரையறு.

8. Let F be a field of real numbers and let V be $F[x]$, the set of all polynomials in x. In V if the linear transformations S and T are defined by $q(x)S = \frac{d}{dx} q(x)$ and $q(x)T = \int_1^x q(x)\,dx$, then show that $ST \neq 1$.

   F என்பது மெய்யெண் களம் மற்றும் V என்பது x–ல் அமைந்த எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணம் $F[x]$ என்க. V–ல் S மற்றும் T என்ற நேரிய உருமாற்றங்கள் $q(x)S = \frac{d}{dx} q(x)$ மற்றும் $q(x)T = \int_1^x q(x)\,dx$ என வரையறுப்பின் $ST \neq 1$ எனக் காட்டு.

9. If $A, B \in F_n$, then show that $(A+B)' = A' + B'$.

   $A, B \in F_n$ எனில் $(A+B)' = A' + B'$ எனக் காட்டு.

10. If $A \in F_n$ and if A is invertible, then show that $\det A = \det A^{-1}$.

    $A \in F_n$ மற்றும் A– நேரெதிர் உடையது எனில் $\det A = \det A^{-1}$ எனக் காட்டு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) If A and B are subspaces of a vector space V. then prove that $(A+B)/B$ is isomorphic to $A/(A \cap B)$.

    A மற்றும் B என்பன வெக்டர் வெளி V–ன் உள்வெளிகள் எனில் $(A+B)/B$ ஆனது $A/(A \cap B)$ –க்கு இயலொப்புமை உடையது என நிருபு.

    Or

    (b) Prove that the intersection of two subspaces of vector space is also a subspace of it.

    ஒரு வெக்டர் வெளியின் இரு உள்வெளிகளின் வெட்டும் அதன் ஒரு உள்வெளியே என நிருபி.

12. (a) If A and B are finite-dimensional subspaces of a vector space V, then prove that $A+B$ is finite-dimensional and $\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$.

    A மற்றும் B என்பன வெக்டர் வெளி V–ன் முடிவுறு பரிமாணமுடைய உள் வெளிகள் எனில் $A+B$ முடிவுறு பரிமாணமுடையது என்றும் $\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ எனவும் நிருபு.

    Or

(b) Prove that $F^{(n)}$ is isomorphic to $F^{(m)}$ if and only if $m = n$.

$F^{(n)}$ ஆனது $F^{(m)}$ க்கு இயலொப்புமை உடையது எனில், எனில் மட்டுமே $m = n$ என நிருபு.

13. (a) If W is a subspace of finite-dimensional inner product space V, then prove that $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

W என்பது உட்பெருக்க வெளி V–ன் முடிவுறு பரிமாணமுடைய உள்வெளி எனில் $(W^{\perp})^{\perp} = W$ என நிருவு.

Or

(b) State and prove parallelogram law in an inner product space.

உட்பெருக்க வெளியில் இணைகர விதியைக் கூறி நிறுவுக.

14. (a) If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$ then prove that for any polynomial $q(x) \in F[x]$, $q(\lambda)$ is a characteristics root of $q(T)$.

$\lambda \in F$ என்பது $T \in A(V)$–ன் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலம் எனில், $q(x) \in F[x]$ என்ற எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும், $q(\lambda)$ ஆனது $q(T)$–ன் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலம் என நிருவு.

Or

(b) If V is a finite-dimensional vector space ove F and if $T \in A(V)$ has all its characterist roots in F, then prove that T satisfies polynomial of degree n over F.

V என்பது F–ன் மீது முடிவுறு பரிமாணமுடை வெக்டர் வெளி மற்றும் $T \in A(V)$ ஆனது என எல்லா சிறப்பியல்பு மூலங்களையும் F– பெற்றிருப்பின் F–ன் மீது T ஒரு n – ப பல்லுறுப்புக் கோவையை நிவர்த்தி செய்யும் எ நிருவு.

15. (a) If F is of characteristic zero and if S an T, in $A_F(V)$ are such tha $ST - TS$ commutes with S, then prove tha $ST - TS$ is nilpotent.

F என்பது பூச்சிய பாண்மை உடையது மற்று $A_F(V)$–ல் உள்ள S மற்றும் T என்பன S உடன் $ST - TS$ பரிமாற்றுத் தன்மை உள்ளவாறு உடையன எனில் $ST - TS$ ஆனது ஒரு சுழியாக்கி என நிருவு.

Or

(b) Prove that $A \in F_n$ is invertible if and only i determinant of A is not equal to zero.

$A \in F_n$ என்பது நேர்மாறு உடையது எனில், எனில் மட்டுமே A–ன் அணிக்கோவை பூச்சியமானது என நிருவு.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. If W is a subspace a vector space V over F, then prove that V/W is a vector space over F by defining suitable operations.

F–ன் மீதான வெக்டர் வெளி V–ன் உள்வெளி W எனில் V/W என்பது தகுந்த செயலிகளை வரையறுப்பதன் மூலம் F–ன் மீது ஒரு வெக்டர் வெளி என நிரூபி.

17. If $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ is a basis of the vector space V over F and if $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m$ in V are linearly independent over F, then prove that $m \le n$ and hence show that any two bases of V have the same number of elements.

F– ன் மீதான வெக்டர் வெளி V–ன் ஒரு அடிக்கணம் $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ மேலும் V–ல் $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m$ என்பது ஒன்றையொன்று F சாராதவை எனில் $m \le n$ என நிருவி. இதிலிருந்து V–ன் எந்த இரு அடிக்கணங்களும் சம எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டு.

18. If V is a finite-dimensional inner product space, then prove that it has an orthonormal set

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய உட்பெருக்கு வெளி எனில் அது ஒரு செங்குத்து அலகு கணத்தை அடிக்கணமாக பெற்றிருக்கும் என நிரூபி.

19. Let V be the vector space of polynomials of degree 3 or less over F. If $T \in A(V)$ is defined by $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)T = \alpha_0 + \alpha_1 (x+1) + \alpha_2 (x+1)^2 + \alpha_3 (x+1)^3$, then find the matrix of T in the basis $1, x, x^2, x^3$.

V என்பது F–ன் மீது படி 3 அல்லது அதற்குக் குறைவான படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகளாலான வெக்டர் வெளி என்க. $T \in A(V)$ ஆனது $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)T = \alpha_0 + \alpha_1 (x+1) + \alpha_2 (x+1)^2 + \alpha_3 (x+1)^3$ என வரையறுப்பின் $1, x, x^2, x^3$ என்ற அடிக்கணத்தில் T–ன் அணியைக் காண்க.

20. If $A, B \in F_n$, then prove that $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

$A, B \in F_n$ எனில் $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ என நிரூபி.

S. Harini

(... pages)

S.No. 2427

12UMA10

(For the candidates admitted from 2012-2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2018

Sixth Semester

Mathematics

ALGEBRAIC STRUCTURE – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL the questions.

1. Prove that the kernel of vector space homomorphism $T : V \to W$ is a subspace of V.

   $T : V \to W$ என்ற வெக்டர் வெளி செயலொப்புமையின் உட்கரு V –ன் ஒரு உள்வெளி என நிருவு.

2. If V is a vector space over the field F, show that $\alpha 0 = 0$ for $\alpha \in F$ and 0 is the zero of addition in V.

   களம் F –ன் மீது V ஒரு வெக்டர் வெளி எனில் $\alpha \in F$ மற்றும் V –ன் கூட்டல் பூச்சியம் 0 –க்கு, $\alpha 0 = 0$ எனக் காட்டு.

3. Write the condition for the vector spaces $F^{(n)}$ and $F^{(m)}$ to be isomorphic.

   வெக்டர் வெளிகள் $F^{(n)}$ மற்றும் $F^{(m)}$ ஆகியன இயலொப்புமையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனையை எழுது.

4. Define dimension of a vector space.

   வெக்டர் வெளியின் பரிமாணத்தை வரையறு.

5. If V is a vector space over the field F of complex numbers, then show that $(u, \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}(u,v) + \overline{\beta}(u,w)$ for all $\alpha, \beta \in F$ and for all $u, v, w \in V$.

   சிக்கலெண் களம் F –ன் மீது V ஒரு வெக்டர் வெளி எனில் எல்லா $\alpha, \beta \in F$ மற்றும் எல்லா $u, v, w \in V$ –க்கும் $(u, \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}(u,v) + \overline{\beta}(u,w)$ எனக் காட்டு.

6. Define norm of a vector in an inner product space.

   உட்பெருக்கு வெளியில் ஒரு வெக்டரின் நெறிமத்தை வரையறு.

7. Let F be a field of real numbers and let V be $F[x]$, the set of all polynomials in x. In V if the linear transformations S and T are defined by $q(x)S = \frac{d}{dx}q(x)$ and $q(x)T = \int_1^x q(x)\,dx$, then show that $TS = 1$.

   F என்பது ஒரு மெய்யெண் களம் மற்றும் V என்பது x–ல், எல்லா பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணம் $F[x]$ என்க. V–ல் S மற்றும் T என்ற உருமாற்றங்கள் $q(x)S = \frac{d}{dx}q(x)$ மற்றும் $q(x)T = \int_1^x q(x)\,dx$ என வரையறுப்பின் $TS = 1$ எனக் காட்டு.

8. When a subspace of a vector space is said to be invariant under $T \in A(V)$?

   $T \in A(V)$ –ன் கீழ் எப்போது ஒரு உள்வெளி மாறாதது என்போம்?

9. If $A, B \in F_n$ and A is invertible, then show that $tr(ABA^{-1}) = trB$.

   $A, B \in F_n$ மற்றும் A நேர்மாறு உடையது எனில் $tr(ABA^{-1}) = trB$ எனக் காட்டு.

10. If $A \in F_n$, then show that $(A')' = A$.

    $A \in F_n$ எனில் $(A')' = A$ எனக் காட்டு.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Prove that the mapping $T : F^{(3)} \to F^{(3)}$ defined by $(x_1, x_2, x_3)T = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3)$ is a homomorphism.

    $(x_1, x_2, x_3)T = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3)$ T என்று வரையறுக்கப்பட்ட $T : F^{(3)} \to F^{(3)}$ என்ற கோர்த்தல் ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் என நிருபு.

    Or

    (b) If U and W are subspaces of a vector space V, then prove that

    $U + W = \{v \in V \mid v = u + w, u \in U \text{ and } w \in W\}$ is also a subspace of V.

    U மற்றும் W என்பன V–ன் உள்வெளிகள் எனில் $U + W = \{v \in V \mid v = u + w, u \in U\ w \in W\}$ என்பதும் V–ன் ஒரு உள்வெளியே என நிருவு.

12. (a) If S is a nonempty subset of a vector space V, then prove that $L(S)$ is a subspace of V.

S என்பது வெக்டர் வெளி V-ன் வெற்றற்ற உட்கணம் எனில் $L(S)$ ஆனது V-ன் ஒரு உள்வெளி என நிருவு.

Or

(b) If F is the field of real numbers, then prove that the vectors $(1,1,0,0),(0,1,-1,0)$ and $(0,0,0,3)$ in $F^{(4)}$ are linearly independent over F.

F என்பது மெய்யெண் களம் எனில் $(1,1,0,0),(0,1,-1,0)$ மற்றும் $(0,0,0,3)$ என்ற $F^{(4)}$-ன் வெக்டர்கள் F-ன் மீது ஒன்றையொன்று சாராதவை என நிருவு.

13. (a) State and prove schwarz's inequality.

ஸ்வார்ஸின் சமனிலியைக் கூறி நிருவு.

Or

(b) State and prove Bessel's inequality.

பெசலின் சமனிலியைக் கூறி நிருவு.

14. (a) If V is a vector space over a field F and if $T_1,T_2 \in Hom(V,V)$, then prove that $T_1,T_2 \in Hom(V,V)$

V என்பது களம் F-ன் மீதான வெக்டர் வெளி மற்றும் $T_1,T_2 \in Hom(V,V)$ எனில் $T_1,T_2 \in Hom(V,V)$ என நிருவு.

Or

(b) If V is a finite-dimensional vector space over F, then prove that $T \in A(V)$ if and only if the constant term of the minimal polynomial for T is not zero.

F-ன் மீது V என்பது ஒரு முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளி எனும் போது $T \in A(V)$ எனில், எனில் மட்டுமே T-க்கான மீச்சிறு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலி உறுப்பு பூச்சியமன்று என நிருவு.

15. (a) Prove that if the multiple of one row is added to another row, then the value of determinant is not changed.

ஒரு நிறையின் பெருக்கலை மற்றொரு நிறையோடு கூட்டுகையில் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது என நிருபு.

Or

(b) Prove that every $A \in F_n$ satisfies its secular equation.

ஒவ்வொரு $A \in F_n$-ம் தனது சிறப்புச் சமன்பாட்டை நிவர்த்தி செய்யும் என நிருபு.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Define internal direct sum of a vector space. Also show that, if the vector space V is the internal direct sum of its subspaces $U_1,U_2,...U_n$, then V is isomorphic to the external direct sim $U_1,U_2,...U_n$.

வெக்டர் வெளியின் உள் நேர்க்கூட்டலை வரையறு. மேலும் வெக்டர் வெளி V-ஆனது அதன் உள்வெளிகள் $U_1,U_2,...U_n$ ஆகியவற்றின் உள்நேர்க்கூடுதல் எனில் V ஆனது $U_1,U_2,...U_n$ ஆகியவற்றின் புற நேர்க் கூடுதலுக்கு இயலொப்புமை உடையது என நிருவு.

17. If W is a subspace of a finte-dimesional vector space V over F and, then prove that W is also finite-dimensional, $\dim W \le \dim V$, and $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

W என்பது F-ன் மீது முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளி V-ன் ஒரு உள்வெளி எனில் W-ம் முடிவுறு பரிமாணமுடையது என நிருவு. மேலும் $\dim W \le \dim V$ மற்றும் $\dim V/W = \dim V - \dim W$ என நிருவு.

18. If V is the set of polynomials in x of degree 2 or less over the field of real numbers and if the inner product in V is defined by $(p(x),q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$, $p(x),q(x) \in V$, then find the orthonormal basis corresponding to the basis $1, x, x^2$ of V.

மெய்யெண் களத்தில் V என்பது படி 2 அல்லது அதற்குக்குறைவான படியுடைய, x-ல் அமைந்த, பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மற்றும் $p(x),q(x) \in V$ ஆகியவற்றின் உட்பெருக்கம் $(p(x),q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ என வரையறுப்பின் $1, x, x^2$ என்ற V-ன் அடிக்கணத்தோடு தொடர்புடைய செங்குத்து அலகு கணத்தைக் காண்க.

19. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then there is a basis in which the matrix of T is triangular. Prove.

$T \in A(V)$ ஆனது F-ல் தனது எல்லா சிறப்பியல்பு மூலங்களையும் பெற்றிருப்பின் T-ன் அணி முக்கோண அணியாக அமையுமாறு ஒரு அடிக்கணம் உண்டு என நிருவு.

20. State and prove Cramer's rule for solving a system of equations.

ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை தீர்ப்பதற்கான கிராமரின் விதியைக் கூறி நிருவு.

S. Harini

ges)

S.No. 2165

12UMA10

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION,
APRIL 2019.

Sixth Semester

Mathematics

ALGEBRAIC STRUCTURES – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Prove that in a vector space V over F, $\alpha (u - v) = \alpha u - \alpha v$.

   V என்பது Fன் மீதான வெக்டர் வெளி எனில், $\alpha (u - v) = \alpha u - \alpha v$ என நிறுவுக.

2. Define Kernel of homomorphism.

   வரையறு : செயல்மாறாக் கோர்த்தல்.

3. Prove that $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ is a linearly independent subset of $\mathbb{R}^3$.

   $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ என்பது $\mathbb{R}^3$-ன் ஒன்றையொன்று சாராதவை என நிறுவுக.

4. If $S = \{(1, 1, -1)\}$ is a subset of $\mathbb{R}^3$, find $\dim (L(S))$.

   $S = \{(1, 1, -1)\}$ என்பது $\mathbb{R}^3$-ன் உட்கணம் எனில், $\dim (L(S))$ ன் மதிப்பு காண்க.

5. Define orthogonal complement of a subspace.

   வரையறு : ஒரு உள்வெளியின் செங்குத்து நிரப்பு.

6. Prove that $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

   $\|\alpha u\| = |\alpha| . \|u\|$ என நிறுவுக.

7. If $T \in A(V)$ and $r(T) = \dim(V)$, prove that T is regular.

   $T \in A(V)$ மற்றும் $r(T) = \dim(V)$ எனில் T ஆனது ஒழுங்கான உருமாற்றம் என நிறுவுக.

8. If $T \in Hom(V, V)$ and $\alpha \in F$, prove that $\alpha T \in Hom(V, V)$.

   $T \in Hom(V, V)$ மற்றும் $\alpha \in F$ எனில், $\alpha T \in Hom(V, V)$ என நிறுவுக.

9. State Cramer's rule.

   கிராமர் விதியை எழுதுக.

10. Define Determinant.

    வரையறு : அணிக்கோவை.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that the kernel of a homomorphism is a subspace.

    செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் உட்கருவானது ஒரு உள்வெளி என நிறுவுக.

    Or

    (b) If W_1, W_2 are subspace of V, prove that $W_1 \cap W_2$ is a subspace of V.

    W_1, W_2 என்பது V-ன் உள்வெளி எனில் $W_1 \cap W_2$ என்பது V-ன் உள்வெளி என நிறுவுக.

12. (a) Show that the vectors $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0, 4)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$ form a basis for $\mathbb{R}^4$.

    $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0, 4)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$ என்ற வெக்டர்கள் $\mathbb{R}^4$-ல் ஒன்றையொன்று சாராதவை என நிறுவுக.

    Or

    (b) If V is a finite dimensional vector space and $T \in Hom(V, V)$ is not onto prove that there is some $V \neq 0$ in V show that $VT = 0$.

    V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய உட்பெருக்கு வெளி மற்றும் $T \in Hom(V, V)$ எனில், ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் $V \neq 0$ ல் $VT = 0$ என நிறுவுக.

13. (a) State and prove Schwarz inequality.

    ஷீவார்ஷ் சமனிலியை கூறி நிறுவுக.

    Or

    (b) If W is a subspace of V, prove that $W^{\perp}$ is a subspace of V.

    W என்பது V-ன் உள்வெளி எனில், $W^{\perp}$ என்பது V ன் உள்வெளி என நிறுவுக.

14. (a) If V is finite dimensional vector space over F and $T \in A(V)$ is invertible, prove that T^{-1} is a polynomial expression in T over F,

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய F ன் வெக்டர் வெளி மற்றும் $T \in A(V)$ என்பது நேர் மாற்றல் உடையது எனில், F ல் T^{-1} என்பது T-ன் பல்லுறுப்பு கோவையாக இருக்கும் என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that if $S, T \in A(V)$ and S is regular, then $r(ST) = r(TS) = r(T)$.

$S, T \in A(V)$ மற்றும் S என்பது ஒழுங்கான உருமாற்றம் எனில், $r(ST) = r(TS) = r(T)$ என நிறுவுக.

15. (a) Prove that $\det(A) = \det(A')$, $A \in F_n$.

$A \in F_n$ எனில், $\det(A) = \det(A')$ என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that $(AB)' = B'A'$ for all $A, B \in F_n$.

அனைத்து $A, B \in F_n$ க்கும், $(AB)' = B'A'$ என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If V is a vector space over F and W is a subspace of V, prove that $\left(\frac{V}{W}, +, \cdot\right)$ is a vector space over F.

V என்பது F-ன் மீதான வெக்டர்வெளி மற்றும் W என்பது V-ன் உள்வெளி எனில், $\left(\frac{V}{W}, +, \cdot\right)$ என்பது F-ன் மீதான வெக்டர்வெளி என நிறுவுக.

17. If A, B are finite dimensional subspaces of V, prove that $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.

A மற்றும் B என்பது V ன் முடிவுறு பரிணாமமுடைய உள்வெளிகள் எனில் $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$ என நிறுவுக.

18. If V is a finite dimensional inner product space and W is a subspace of V, prove that $V = W + W^{\perp}$.

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய உட்பெருக்குவெளி மற்றும் W என்பது V ன் உள்வெளி எனில், $V = W + W^{\perp}$ என நிறுவுக.

9. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, prove that there is a basis of V in which the matrix of T is triangular.

$T \in A(V)$ ன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களும் F, ல் உள்ளது எனில், ஏதாவது ஒரு அடிக்கணம் V-ல், T ன் அணியானது முக்கோணத் தன்மை உடையது என நிறுவுக.

20. If F is a field of characteristic 0 and if $T \in A(V)$ is such that $tr(T^i) = 0$ for all $i \geq 1$, prove that T is nil potent.

F ன் சிறப்பியல்பு 0, $T \in A(V)$ மற்றும் அனைத்து $i \geq 1$ க்கும் $tr(T^i) = 0$ எனில், T என்பது படிசுழி என நிறுவுக.

S. Harini

ges)

S.No. 8441

12UMA10

(For the candidates admitted from 2012-2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, JULY 2019.

(Supplementary Exam)

Sixth Semester

Mathematics

ALGEBRAIC STRUCTURES – II

Time : Three hours　　　Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Is $W = \{(x^2, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ a subspace of $\mathbb{R}^2$? Justify your answer.

   $W = \{(x^2, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ என்பது $\mathbb{R}^2$-ன் உள்வெளியா? உன் பதில்லை விளக்குக.

2. If W_1 and W_2 are subspaces of V, prove that $W_1 + W_2$ is a subspace of V.

   W_1 மற்றும் W_2 என்பது V-ன் உள்வெளிகள் எனில் $W_1 + W_2$ என்பது V-ன் உள்வெளி என நிறுவுக.

3. If $v \in V$ and $v \neq 0$ prove that $\{v\}$ is linearly independent.

   $v \in V$ மற்றும் $v \neq 0$ எனில், $\{v\}$ என்பது ஒன்றையொன்று சாராதவை என நிறுவுக.

4. If $W_1 = \{(x_1, x_2, 0) = x_1, x_e \in \mathbb{R}\}$,
   $W_2 = \{(0, x, y) = x, y \in \mathbb{R}\}$,
   are subspace of $\mathbb{R}^3$, find $\dim(W_1 + W_2)$.

   $W_1 = \{(x_1, x_2, 0) = x_1, x_e \in \mathbb{R}\}$ மற்றும்
   $W_2 = \{(0, x, y) = x, y \in \mathbb{R}\}$,
   என்பது $\mathbb{R}^3$-ன் உள்வெளிகள் எனில், $\dim(W_1 + W_2)$-ஐ காண்க.

5. Define orthonormal set.

   வரையறு : செங்குத்து அலகு.

6. Define the length of a vector V.

   வரையறு : வெக்டர் V-ன் நீளம்.

7. If $T \in A(V)$ and $r(T) = 0$, prove that T is singular.

   $T \in A(V)$ மற்றும் $r(T) = 0$ எனில் T என்பது ஒழுங்கான உருமாற்றம் என நிறுவுக.

8. Prove that if $T_1, T_2 \in Hom(v, V)$, then $T_1 + T_2 \in Hom(v, V)$.

   $T_1, T_2 \in Hom(v, V)$ எனில், $T_1 + T_2 \in Hom(v, V)$ என நிறுவுக.

9. Prove that if $A \in F_n$ then $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$ for some $\lambda \in F$.

   $A \in F_n$ எனில் $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$ என நிறுவுக, $\lambda \in F$.

10. State Grammar's rule.

    கிராமரின் விதியை எழுதுக.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that the intersection of two subspaces of V is a subspace of V.

    V-ன் இரண்டு உட்வெளிகளின் குறுக்குவெட்டும் V-ன் உள்வெளி என நிறுவுக.

    Or

    (b) Define internal direct sum and external direct sum.

    வரையறு : உள்நேர் கூடுதல் மற்றும் வெளிநேர் கூடுதல்.

12. (a) Show that the vectors $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$, $\alpha_3 = (0, -3, 2)$ form a basis for $\mathbb{R}^3$.

    $\mathbb{R}^3$-ல், $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$, $\alpha_3 = (0, -3, 2)$ என்ற வெக்டர்கள் அடிக்கணத்தை உருவாக்கும் என நிறுவுக.

    Or

    (b) If $V_1, V_2, \ldots, V_n$ are in V, prove that either they are linearly independent (or) some V_k is a linear combination of the preceding ones $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

    $V_1, V_2, \ldots, V_k \in V$ எனில், $V_1, \ldots V_k$ என்பது ஒன்றையொன்று சாராதவை அல்லது V_k என்பது $V_1, V_2, \ldots, V_k$-ன் நேரியல் சேர்க்கை ஆக இருக்கும் என நிறுவுக.

13. (a) If $u, v \in V, \alpha, \beta \in F$, prove that

    $$(\alpha u + \beta r, \alpha u + \beta v) = \alpha\bar{\alpha}\,(u, u) + \alpha\bar{\beta}\,(u, v) + \bar{\alpha}\beta\,(v, u) + \beta\bar{\beta}\,(v, v).$$

    $\alpha, \beta \in F$ மற்றும் $u, v \in V$ எனில்,

    $$(\alpha u + \beta r, \alpha u + \beta v) = \alpha\bar{\alpha}\,(u, u) + \alpha\bar{\beta}\,(u, v) + \bar{\alpha}\beta\,(v, u) + \beta\bar{\beta}\,(v, v)$$

    என நிறுவுக.

    Or

(b) If V is a finite dimensional inner product space and W is a subspace of V, prove that $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய உட்பெருக்கு வெளி மற்றும் W என்பது V-ன் உட்வெளி எனில் $(W^{\perp})^{\perp} = W$ என நிறுவுக.

14. (a) Prove that if $S, T \in A(V)$ and S is regular, then $r(ST) = r(TS) = r(T)$.

$S, T \in A(V)$ மற்றும் S என்பது ஒழுங்கான உருமாற்றம் எனில் $r(ST) = r(TS) = r(T)$ என நிறுவுக.

Or

(b) If $T \in A(v)$ is invertible, prove that the constant term of the minimal polynomial for T is not 0.

$T \in A(v)$ என்பது நேர் மாற்றல் உடையது எனில், T-ன் சிறுமம் பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலி பூஜ்ஜியமாக இருக்காது என நிறுவுக.

15. (a) If $T \in A(V)$, prove that $tr(T)$ is the sum of the characteristic roots of T.

$T \in A(V)$ எனில், $tr(T)$ என்பது T-ன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களின் கூடுதல் என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that the determinant of a triangular matrix is the product of its entries on the main diagonal.

முக்கோண அணியின் அணிகோவையானது அந்த அணியின் மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கல் பலன் என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If A, B are subspaces of V, prove that $\frac{A+B}{B}$ is isomorphic to $\frac{A}{A \cap B}$.

A மற்றும் B என்பது V-ன் உள்வெளி எனில், $\frac{A+B}{B} \cong \frac{A}{A \cap B}$ என நிறுவுக.

17. If V is a finite dimensional vector space and W is a subspace of V, prove that $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim(V) - \dim(W)$.

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய உள்பெருக்குவெளி மற்றும் W என்பது V-ன் உள்வெளி எனில், $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim(V) - \dim(W)$ என நிறுவுக.

18. If V is a finite dimensional inner produce space prove that V has an orthonormal basis.

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடைய உட்பெருக்கு வெளி எனில் V-க்கு ஒரு செங்குத்து அலகு கணமானது அடிக்கணமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

19. If V is n-dimensional over F and $T \in A(V)$ has all its characteristics roots in F, prove that T satisfies a polynomial of degree n over F.

V என்பது n-முடிவுறு பரிமாணமுடைய F-ன் வெக்டர் வெளி மற்றும் $T \in A(V)$-ன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களும் F-ல் உள்ளது எனில், T என்பது n-படி உள்ள பல்லுறுப்பு கோவையின் தீர்வு ஆகும் என நிறுவுக.

20. Prove that $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ for all $A, B \in F_n$.

$A, B \in F_n$ எனில் $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ என நிறுவுக.

S. Harini

(7 pages)
S.No. 2016

12UMA10

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2019.

Sixth Semester

Mathematics

ALGEBRAIC STRUCTURE – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL the questions.

1. Define a vector space.

   ஒரு வெக்டர் வெளியை வரையறு.

2. Show that $\alpha.0 = 0$ for all scalar α for a vector space V.

   வெக்டர் வெளியில் V எந்தொரு மாறிலி α –க்கு $\alpha.0 = 0$ என நிறுவுக.

3. Define linearly independent vectors.

   நன்றையொன்று சாராதவை வெக்டர்களை வரையறு.

4. Define the dimension of a vector space.

   ஒரு வெக்டர் வெளியின் பரிமானத்தை வரையறு.

5. Give an example of an inner product space.

   உட்பெருக்கக் வெளிக்கு உதாரணம் கொடு.

6. Find the length of $(1-i)$ in a complex vector space.

   சிக்கல் வெக்டர் வெளியில், $(1-i)$ –யின் நீளமென்ன.

7. Define Hom(V, V) where V is a vector space.

   Hom(V, V) –ஐ வரையறு. இங்கு V என்பது வெக்டர் வெளி.

8. Give an example of an algebra.

   அறமத்திற்கு ஒரு உதாரணம் கொடு.

9. Find the trace of $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

   $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ –யின் சுவடை காண்க.

   1 − 2 3 + 2 5 −1

10. Define a symmetric matrix.

    சமச்சீர் அணியை வரையறு.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Show that F^n is a vector space over a field F.

    F என்ற புலத்தின் மீது, F^n என்பது ஒரு வெக்டர் வெளியேன நிறுவுக.

    Or

    (b) Prove that the Kernal of a vector space homomorphism is a subspace.

    வெக்டர் வெளியின் செயல்மாறா கோர்த்தலின் உட்கரு உட்வெளியேன நிறுவுக.

12. (a) For any subsets S, T of a vector space V, verify that $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

    S, T என்பது V– என்ற வெக்டரில் உட்கணங்கள் எனில் $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ என நிறுவுக.

    Or

    (b) Let V be a finite dimensional vector space. Show that there are finite linearly independent vectors in 'V' whose linear span is V.

    முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட வெக்டர் வெளி V எனில், ஒன்றையொன்று சார்ந்த முடிவுறு எண்ணிக்கை கொண்ட வெக்டர்கள் கிடைக்க பெற்று, அவைகளின் நேரியல் அளாவல் V என நிறுவுக.

13. (a) In $F^{(2)}$, define $\langle u, v\rangle = \langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2$. Verify that $<, >$ is an inner product on $F^{(2)}$.

    $F^{(2)}$–யில் $\langle u, v\rangle = \langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2$. எனில், $<, >$ என்று ஒரு உட்பெருக்கலென நிறுவுக.

    Or

    (b) If $\{v_i\}$ is an orthonormal set, then the vectors in $\{v_i\}$ are linearly independents.

    $\{v_i\}$ என்பது செங்குத்து அலகு கணமெனில், அதிலுள்ள வெக்டர்கள் ஒன்றையொன்று சாராதது என நிறுவுக.

14. (a) Let A be an algebra of dimension m over F. Show that each element in A satisfies some Polynomial of degree at most m over F.

    F–யின் மீது A என்பது m – பரிமாணம் கொண்ட அறமம் எனில், A–யின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் m–படி கொண்ட ஏதேனும் ஒரு பல்லுருப்பு கோவையை தீர்க்குமென நிறுவு.

    Or

(b) If V is two-dimensional over a field F, verify that each element in $A(V)$ satisfies a polynomial of degree 2 over F.

F–யின் மீது V என்பது இரு பரிமாணம் கொண்ட வெளி எனில், $A(V)$ –யின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் 2–பிடி கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்பு கோவையை தீர்க்குமென நிறுவுக.

15. (a) For $A, B \in F_n$ and $\lambda \in F$, show that $t_r(\lambda A) = \lambda t_r(A)$, and $t_r(A+B) = t_r(A) + t_r(B)$.

$\lambda \in F$ மற்றும் $A, B \in F_n$ எனில், $t_r(\lambda A) = \lambda t_r(A)$, மற்றும் $t_r(A+B) = t_r(A) + t_r(B)$ என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that A is invertible if and only if $\mathrm{dlt}\, A \neq 0$.

A என்பது நேர்மாறாக இருக்க போதுமான தேவையான நிபந்தனைகள் $\mathrm{dlt}\, A \neq 0$ என நிறுவுக.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. (a) Show that the intersection of two subspaces of a vector space is a subspace.

(b) Let $W = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in V : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$.

Show that W is a subspace of V.

(அ) வெக்டர் வெளியில் இரு உட்வெளிகளின் வெட்டு ஒரு உட்வெளியேன நிறுவுக.

(ஆ) W என்பது

$W = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in V : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ எனில்

W என்பது V–யின் உட்வெளி என நிறுவுக.

17. (a) If $v_1, v_2, \ldots, v_n$ is a basis of V, and $w_1, w_2, \ldots, w_m$ in V are linearly independent over F, verify that $m \leq n$.

(b) Deduce that any two bases of V have the same number of elements.

(அ) V–க்கு $v_1, v_2, \ldots, v_n$ என்பன ஒரு அடிகணம் மற்றும் V–யில் $w_1, w_2, \ldots, w_m$ என்பன ஒன்றையொன்று சாராத வெக்டர்கள் எனில், $m \leq n$ என நிறுவுக.

(ஆ) V –யில் எந்த இரு அடிகணங்களும் சம எண்ணிக்கை உறுப்புகள் உடையதென நிறுவுக.

18. If V is a finite-dimensional inner product space, verify that V has an orthonormal set as a basis.

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுடை உட்பெருக்கி வெளி எனில் V–க்கு ஒரு செங்குத்து அலகு கணமானது அடிக்கணமாக இருக்குமென நிறுவுக.

19. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, show that there is a basis of V for which the matrix of T is triangular.

$T \in A(V)$ என்ற உருமாற்றம் F –யில் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்கள் உள்ளதெனில், ஏதேனுமொரு ஒரு அடிக்கணம் V–க்கு கிடைக்க பெற்று T–யின் அணி முக்கோணமுடையதென நிறுவுக.

20. If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$, then prove that λ is a root of the minimal polynomial of T. In particular T only has a finite number of characteristic root in F.

$T \in A(V)$ ல் $\lambda \in F$ ஒரு சிறப்பியல் மூலம் எனில் மீச்சிறு பல்லுறுப்பு கோவை T ல் λ ஒரு மூலம் என நிறுவுக. குறிப்பாக F ல் T ஒரே ஒரு முடிவுறு எண் கொண்ட சிறப்பியல் மூலம்.

(8 pages)

S.No. 2755 **17UMA12**

(For the candidates admitted from 2017-2018 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL/MAY 2020.

Sixth Semester

Mathematics

Core XII – MODERN ALGEBRA – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL the questions.

1. Give an example of a vector space.

   ஒரு திசையன் வெளிக்கு ஒரு உதாரணம் கொடு.

2. Define a finite-dimensional vector space.

   முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளியை வரையறு.

3. Define the norm of a vector.

   ஒரு வெக்டரின் நெறியை வரையறு.

4. Give an example of an inner product space.

   உட்பெருக்கல் வெளிக்கு ஒரு உதாரணம் கொடு.

5. Define an associative ring.

   மாற்று பண்புடைய வளையதை வரையறு.

6. What is the rank of singular transformation?

   வழுவுள்ள உருமாற்றத்தின் தர எண் என்ன?

7. Define invariant subspace of a vector space under a linear transformation.

   நேரியல் உருமாற்றத்தை பொறுத்து, ஒரு வெக்டர் வெளியில் மாற்றமுறாததுள்ள உட்வெளியை வரையறு.

8. State two partitions of the integer 10.

   முழு எண் 10–க்கு இரண்டு பிரிப்புகளை கூறு.

9. Define the trace of a matrix.

   ஒரு அணியில் ட்ரெஸ் வரையறு.

10. Define a characteristics vector of a transformation to a characteristics root.

    ஒரு உருமாற்றத்தில் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலத்தின் சிறப்பியல்பு வெக்டரை வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

(a) Show that the kernel of a homomorphism is a subspace.

தொடர் அமைவியமின் உட்கரு உட்வெளியான நிறுவுக.

Or

(b) Let a vector space V have a basis of n–elements. Prove that V is isomorphic to $F^{(n)}$.

வெக்டர் வெளி V என்பது n–உறுப்புகள் கொண்ட அடிகணம் உள்ளதெனில், V மற்றும் $F^{(n)}$ என்பன சம அமைவு என நிறுவுக.

(a) Let $u, w \in V$ and $\alpha, \beta \in F$. Show that

$$\|\alpha u + \beta w\|^2 = |\alpha|^2 \|u\|^2 + \alpha\overline{\beta}\langle u, w\rangle + \overline{\alpha}\beta\langle w, u\rangle + |\beta|^2 \|w\|^2$$

$u, w \in V$ மற்றும் $\alpha, \beta \in F$ எனில்

$$\|\alpha u + \beta w\|^2 = |\alpha|^2 \|u\|^2 + \alpha\overline{\beta}\langle u, w\rangle + \overline{\alpha}\beta\langle w, u\rangle + |\beta|^2 \|w\|^2$$

Or

(b) Prove that $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$ for all u, v in an inner product space.

உள்பெருக்கல் வெளியில் u, v என்பன உறுப்புகள் எனில்

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$ என நிறுவுக.

13. (a) Let A be an algebra of dimension 'm' with unit element over F. Show that every n–element in A satisfies some non-trivial polynomial over F of degree at most 'm'.

F–யின் மீது அலகு உறுப்பு பரிமாணம் m–யும் கொண்ட ஆல்ஜிப்ரா A–எனில், A–யின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதிகபடியாக n–படி கொண்ட பல்லுறுப்பு கோவையின் மூலமென நிறுவுக.

Or

(b) Let V be finite-dimensional over F. Show that $T \in A(V)$ is regular if and only if T maps V onto V.

F–யின் மீது V என்பது முடிவுறு பரிமாணம். $T \in A(V)$ என்பது ஒழுங்கான உருமாற்றதிற்கு போதுமான தேவையான நிபந்தனை. T என்பது V–யிலிருந்து Vக்கு முழுக்கோப்பு என நிறுவுக.

14. (a) Let $T \in A(V)$ and $W \subset V$ be invariant under T. Show that T induces a linear transformation $\overline{T}$ on V/W.

$T \in A(V)$ மற்றும் T–ஐ பொறுத்து W என்பது மாற்றமுடியாதது எனில் V/W யின் மீது T–யானது ஒரு நேரியல் உருமாறத்னதை கொடுக்குமென நிறுவுக.

Or

(b) Prove that the relation of similarity is an equivalence relation in $A(V)$.

$A(V)$–யில் ஒத்த நேரியல் உருமாற்றத்தின் உறவு ஒரு சமான உறவென நிறுவுக.

15. (a) Let F be a field of characteristic not 2, and $*$ be any adjoint on F_n. Let $S = \{A \in F_n : A^* = A\}$ and $K = \{A \in F_n : A^* = (-A)\}$. Prove that $F_n = S + K$.

சிறப்பியல்பு எண் 2–யில்லாத புலம் F எனவும் மற்றும் $*$ என்பது F–யின் மீது இணைப்பாகும். $S = \{A \in F_n : A^* = A\}$ மற்றும் $K = \{A \in F_n : A^* = (-A)\}$ எனில் $F_n = S + K$ என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that $\det(A) = \det(A')$, where $A \in F_n$.

$A \in F_n$ எனில் $\det(A) = \det(A')$ என நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Let W be a subspace of finite-dimensional V. Show that (a) $\overline{W}$ is isomorphic to $\overline{V}/A(W)$, (b) $\dim A(W) = \dim(V) - \dim(W)$ (c) $A(A(W)) = W$.

W என்பது முடிவுறு பரிமாணம் V–யில் உட்வெளி எனில் நிறுவுக (அ) $\overline{W}$ மற்றும் $\overline{V}/A(W)$ என்பன சம அமைவு (ஆ) $\dim A(W) = \dim(V) - \dim(W)$ மற்றும் (இ) $A(A(W)) = W$

17. Let V be a finite dimensional inner product space. Show that V has an orthonormal as a basis.

V என்பது முடிவுறு–பரிமாணமுடைய உள் பெருக்கம் வெளி எனில், V–யானது அலகு நேறி செங்குத்து அடிகணம் பெற்று இருக்குமென நிறுவுக.

18. (a) Let $\dim_F V = n$, $T \in A(V)$, and T has n-distinct characteristics roots in F. Show that there is a basis of V over F which consists of characteristic vectors of T.

(b) Let V be the set of all polynomials in x of degree $(n-1)$ or less over a field F. Define

$$D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}) = \alpha_1 + \alpha_2(2x) + \alpha_3(3x^2) + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2}.$$

Find the matrix of D.

(அ) $\dim_F V = n$. $T \in A(V)$ மற்றும் T என்பது F–யில் n–சிறப்பியல்பு மூலங்கள் உள்ள எனில், T–யின் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் கொண்ட கணம் V–யின் அடிகணமெனெ நிறுவுக.

(ஆ) F–யின் மீது V என்பது படி $(n-1)$ அல்லது அதற்கு குறைவான படி கொண்ட அனைத்து பல்லுறுப்பு கோவைகளின் கணம் மற்றும்

$$D\left(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}\right) =$$

$$\alpha_1 + \alpha_2(2x) + \alpha_3\left(3x^2\right) + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2}$$

எனில் D–யின் அணியை காண்க.

19. Let V be finite-dimensional $v \in V$ and $T \in A(V)$ be nilpotent of index K. Let V_1 be a subspace spanned by $v, vT, vT^2, \ldots, vT^{K-1}$. Show that these exists a subspace W of V invariant under T with $V = V_1 \oplus W$.

V என்பது முடிவுறு–பரிமாணம், $v \in V$ மற்றும் $T \in A(V)$ என்பது இன்ம அடுக்கு. V_1 என்பது $v, vT, vT^2, \ldots, vT^{K-1}$ என்ற வெக்டர்களின் பிறப்பாக்கம் எனில், V என்பதற்கு T பொறுத்து மாற்றமுறாத்துள்ள உட்வெளி W கிடைக்கபெற்று $V = V_1 \oplus W$ என இருக்குமென நிறுவுக.

20. Let $A, B \in F_n$. Prove that $\det(AB) = [\det A][\det B]$.

$A, B \in F_n$ எனில் $\det(AB) = [\det A][\det B]$ என நிறுவுக.

———————