(6 pages)

S.No. 2408

17UMA09

(For the candidates admitted from 2017-2018 onwards)

B.Sc DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2020.

Fifth Semester

Mathematics

MODERN ALGEBRA–I

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

1. Define a group

   குலத்தை வரையறு.

2. If G is group prove that the identify element of G is unique.

   G ஒரு குலம் எனில் G-ன் சமனி உறுப்பு ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்தது என நிரூபி.

3. Define a quotient group.

   ஈவு குலத்தை வரையறு.

4. Define homomorphism on group.

குலத்தின் மீது செயல்மாறாக் கோர்த்தல் வரையறு.

5. Define a automerphism on group.

குலத்தின் மீது தன்னுரு மாற்றங்கள் வரையறு.

6. Write the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ as the product of disjoint cycles.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற வரிசை மாற்றத்தை வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கலாக எழுதுக.

7. Define a division ring.

வகுத்தல் வளையத்தை வரையறு

8. Define a commutative ring.

பரிமாற்று வளையம் வரையறு.

9. Define an Euclidean ring.

யூக்ளிடியன் வளையத்தை வரையறு.

10. State the Division algorithm.

வகுத்தல் வழிமுறையை எழுதுக.

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer all the questions

11. (a) Prove that a non empty subset H of a group G is a subgroup of G iff

(i) $a, b \in H$ implies that $a, b \in H$

(ii) $a \in H$ implies that $a^{-1} \in H$

G என்ற குலத்தின் H என்ற வெற்றுகணமில்லாத உட்கணம் உட்குலமாக இருக்கும்.

(i) $a, b \in H$ எனில் $ab \in H$

(ii) $a \in H$ எனில் $a^{-1} \in H$

என்பது போதுமான தேவையான நிபந்தனைகள் என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that if $|G|$ is a finite group and $a \in G$ then $a^{o(G)} = e$

G ஆனது ஓர் முடிவுறு குலம் மற்றும் $a \in G$ எனில் $a^{o(G)} = e$ என நிறுவுக.

12. (a) Prove that N is normal subgroup of G iff $gNg^{-1} = N$ for every $g \in G$.

N னது G-ன் நேர்த்தியான உட்குலம் என்றால் $gNg^{-1} = N \ \forall \ g \in G$ என்றும் அதன் மறுதலையும் உண்மை என நிறுவுக.

Or

(b) If N is a normal subgroup of group G show that $\phi : G \to G/N$ defined by $\phi(x) = N_x$ for all $x \in G$ is a homomorphism.

N னது குலம் G-ன் நேர்த்தியான உட்குலம் எனில் $\phi : G \to G/N$ யை $\phi(x) = Nx \; \forall \, x \in G$ என வரையக்கப்பட்டால் ϕ யை ஒரு செயல்முறைமாறாக் கோர்த்தல் என நிறுவுக.

13. (a) Let Z be the centre of a group G. Then prove that the set of all inner automorphism on G is isomorphic to G/Z.

G என்ற குலத்தின் மையம் Z என்க. தன் உள் ஓரினச்சார்வு என்ற கணமும் G/Z-ம் இயல் மாறா கோர்த்தல் என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that every permutation is the product of its cycles.

ஒவ்வொரு வரிசைமாற்றமும் அதன் சுற்றுகளின் பெருக்கல் பலனாக இருக்கும் என நிரூபிக்க.

14. (a) In a ring R, prove the following

(i) a (–b)= (–a) b= –(ab) for $a,b \in R$.

(ii) Unit element is unique if it is exists.

R-என்ற வளையத்தில் கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) a (–b)= (–a) b= –(ab), $\forall$ a, b $\in$R

(ii) ஒருமைத் தன்மை வாய்த்தென நிறுவுக.

Or

(b) Let R be a commutative ring with unit element. If {0} and R are the only ideals of R, then prove that R is a field.

R என்ற வளையம் அலகு உறுப்புடன் கூடிய பரிமாற்று வளையமென்க. {0} and R என்பவைகள் மட்டுமே R-ன் சீர்வளையங்களெனில் R ஒரு களம் என நிறுவுக.

15. (a) Prove that F [x] is an integral domain.

F[x] ஒரு எண் அரங்கம் என நிறுவுக.

Or

(b) State and prove Gauss lemma.

காஸ் லெம்மாவை எழுதி நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any three questions.

16. State and prove Lagrange's theorem.

லக்ராஞ்சியன் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

17. State ands prove then fundamental theorem of group homomorphism.

குலத்திற்கான செயல்மாறா அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

18. If G is a group A(G), the set of automorphisms of G is also a group.

G ஒரு குலம். A(G) ஆனது G-ன் மீது வரையறுக்கப்படும் அனைத்து தன்னுரு மாற்றங்களின் கணம் எனில், A(G) ஒரு குலம் என நிறுவுக.

19. If U and V are ideals of R. let U+V= $\{U+V | U \in U, v \in V\}$. Prove that U+V is also an ideal of R.

U, V என்பன R ன் சீர்மிகு கணங்கள் எனில் U+V= $\{U+V | U \in U, v \in V\}$ என்றால் U+V யும் R ன் ஓர் சீர்மிகு என நிறுவுக.

20. Prove that J[i] is a Euclidean ring.

J(i) ஒரு யூகிளிடியன் வளையம் என நிறுவுக.